Pregunta (1)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \to \sqrt{e}$$

Se tiene la indeterminacion 1^{∞}

Tomando logaritmo se tendra

$$\lim_{x \to \infty} e^{x^2 \ln\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(x^2 \ln\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)}$$

$$L := \lim_{x \to \infty} \left(x^2 \ln\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$ indeterminacion $0 \cdot \infty$

Arreglando las funciones

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{d}{dx}\ln\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2}}\right) \qquad \frac{d}{dx}\ln\left(\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to -\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Simplificando $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x\right) \to \frac{1}{2}$$ recordano la exponencial nos queda la solucion original.

Pregunta (2)

a.- $$\int \frac{\sqrt{1+x}+x}{x-3}\,dx \to x + 5 \cdot \ln\left(\sqrt{x+1} - 2\right) + \ln\left(\sqrt{x+1} + 2\right) + 2 \cdot \sqrt{x+1} + 1 + C$$

Haciendo la sutitucion $u^2 = 1 + x$ implica $2 \cdot u \cdot du = dx$

$$I_1 := \int \frac{\left(u + u^2 - 1\right)2u}{u^2 - 4}\, du \rightarrow 2\cdot u + 5\cdot \ln(u - 2) + \ln(u + 2) + u^2 + C$$

Fracciones SImple. Recuerde dividir polinomios dado a que la potencia del numerador es mayor.

Regresando el cambio $\quad I_1 := 2\sqrt{1 + x} + 5\ln\left(\sqrt{x+1} - 2\right) + \ln\left(\sqrt{x+1} + 2\right) + x + 1 + C$

b.- $\displaystyle\int \cos(2x)^2\cdot\sin(2x)^2\, dx$ haciendo cambio $u = 2x$ implica $du = 2dx$

Nos queda $\quad I := \frac{1}{2}\cdot\displaystyle\int \cos(u)^2 \sin(u)^2\, du$ aplicando angulo doble.

$$I := \frac{1}{2}\cdot\int \left(\frac{1 + \cos(2u)}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos(2u)}{2}\right) du = \frac{1}{8}\cdot\int 1 - \cos(2u)^2\, du = \frac{1}{8}\cdot\int \sin(2u)^2\, du$$

Aplicando angulo medio $\quad I := \frac{1}{8}\cdot\displaystyle\int \frac{1 - \cos(4u)}{2}\, du \qquad I := \frac{1}{16}\cdot\left(u - \frac{\sin(4u)}{4}\right) + C$

Regresando cambio

$$I := \frac{1}{16}\left(2x - \frac{\sin(8x)}{4}\right) + C$$

RESPUESTA

$$\int \cos(2x)^2\cdot\sin(2x)^2\, dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{x}{8} - \frac{\sin(8\cdot x)}{64}$$

$$\int \cos(2x)^2\cdot\sin(2x)^2\, dx \rightarrow \frac{x}{8} - \frac{\sin(2\cdot x)\cdot\cos(2\cdot x)^3}{8} + \frac{\sin(4\cdot x)}{32}$$

c.- $\displaystyle\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$

Completando cuadrados $\quad \sqrt{3 - 2x - x^2} = \sqrt{3 - \left[(x+1)^2 - 1\right]} = \sqrt{4 - (x+1)^2}$

Haciendo sustitucion trigonometrica $\quad (x + 1) = 2\sin(\alpha)$ implica $dx = 2\cos(\alpha)\, d\alpha$

Sustituyendo

$$I := \int 2\sqrt{4\left(1 - \sin(\alpha)^2\right)}\cdot\cos(\alpha)\,d\alpha = \int 4\cos(\alpha)^2\,d\alpha$$

Angulo medio

$$I := 2\int 1 + \cos(2\alpha)\,d\alpha \rightarrow 2\cdot\alpha + \sin(2\cdot\alpha)$$ +C Regresando cambio

$$I := 2\,\mathrm{asin}\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\cdot\frac{(x+1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{3 - 2x - x^2}}{2}$$ +C

Pregunta (3)

Resolvemos la integral indefinida por partes

$$\int x\cdot\ln(x)\,dx \rightarrow \frac{x^2\cdot(2\cdot\ln(x) - 1)}{4} \qquad I(x) := \frac{x^2\cdot(2\cdot\ln(x) - 1)}{4}$$

Sustituyendo el valor impropio

$$I_{impropia} := \lim_{\xi \to 0^+} (I(1) - I(\xi)) \rightarrow -\frac{1}{4}$$ CONVERGE